

# МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА РАБОЧИХ

**Х.Я. Галиуллин,**

профессор кафедры экономики и управления Димитровградского инженерно-технологического института — филиала Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», кандидат технических наук  
khyagaliullin@gmail.com

*В статье рассматривается авторская методика построения экономико-математических динамических однофакторных и многофакторных моделей прогнозирования производительности труда рабочих. Представлены результаты реализации предлагаемой методики, в которых отражены изменения уровня производительности труда рабочих в динамике и периодичность этих изменений.*

**Ключевые слова:** производственная эффективность, производительность труда, рабочие, корреляционно-регрессионный анализ, спектральный анализ, гармонический анализ, экономико-математическая модель прогнозирования

УДК 331 ББК 65.291.572

В условиях затянувшегося перехода России к рыночной экономике наблюдаются позитивные перемены в теории и практике построения такой экономической системы. Например, постепенно приходит понимание необходимости планирования производственно-хозяйственной деятельности экономических субъектов России. В частности, по 41-й госпрограмме развития профильных министерств России должны быть разработаны детальные трехлетние планы их реализации. Для дальнейшего развития экономической науки не имеет равно никакого значения, будут ли эти планы называться дорожными картами или перечнями критических технологий этих министерств. Важно то, что возрождается система планирования, в основу которой должны быть положены надежные методы прогнозирования и планирования. Трудно представить содержание таких трехлетних планов без плана эффективности труда рабочих конкретного предприятия, входящего в состав определенного профильного министерства. Безусловно, планирование должно базироваться на прогнозировании эффективности труда рабочих предприятия в разномасштабных перспективах.

Эффективность труда рабочих предприятия любой отрасли народного хозяйства и формы собственности оценивается показателями, которые могут быть объединены в две группы: показатели производственной и показатель экономической эффективности труда рабочих [1, с. 133–134]. Принципиальное отличие этих показателей, выраженных кратными экономическими моделями, заключается в использовании соответственно производственного и экономического эффектов [2, с. 11–15; 8, с. 49–50].

Прогнозирование показателей эффективности труда рабочих может осуществляться в пространстве с помощью экономико-математических статических моделей и во времени с использованием экономико-математических динамических моделей. При этом следует заметить, что такое разделение экономико-математических моделей на статические и динамические весьма условно и относительно. Строго говоря, и статические, и динамические модели представляют собой пространственно-временные модели.

Методика прогнозирования производственной эффективности (производительности) труда рабочих на основе экономико-математических статических однофакторных и многофакторных моделей достаточно полно разработана и рассмотрена в работах [2, с. 87–99; 3, с. 220–221; 4, с. 483–484; 5, с. 59–78].

Логика построения таких моделей заключается в следующем. На основе результатов анализа социальной структуры коллектива рабочих определяются социальные факторы, влияющие на производительность их труда. Затем с помощью методов корреляционно-регрессионного анализа осуществляется построение различных экономико-математических статических однофакторных моделей производительности труда рабочих. Эти модели играют очень важную роль в прогнозировании. По результатам анализа таких моделей можно, во-первых, составить представление о существовании связи между производительностью труда рабочих и социальными факторами, а также между различными социальными факторами, во-вторых, определить вид, направление и тесноту связи между ними, в-третьих, выявить экстремальные значения максимума и минимума производительности труда рабочих. Однако изучение парной зависимости между производительностью труда и социальными факторами не всегда эффективно, т.к. эта зависимость,

как правило, многофакторная. А между факторами существуют сложные взаимосвязи, которые нельзя оценить с помощью однофакторных моделей.

Исходя из этих соображений, формируется система экономико-математических статических многофакторных моделей производительности труда рабочих. Экономико-математическая статическая многофакторная модель позволяет определить влияние социальных факторов на производительность труда рабочих во взаимосвязи друг с другом. Анализ характеристик такой модели позволяет определить мнимые и действительные связи между факторами и производительностью труда, а также установить степень и приоритетность влияния каждого фактора на производительность труда рабочих. Такие модели позволяют количественно оценить влияние качественных социальных факторов на уровень и динамику производительности труда рабочих.

Вместе с тем известно, что статическая многофакторная регрессионная модель представляет жесткую связь между уровнем производительности труда и факторами, определяющими его. На самом же деле соотношение между факторами и уровнем производительности труда динамично, т.е. изменяется во времени. Поэтому включение в статическую регрессионную модель факторов без учета их изменения во времени ведет к искажению прогнозируемых результатов, т.е. производительности труда рабочих.

Анализ практического использования методов экономического прогнозирования показал, что при прогнозировании производительности труда рабочих на краткосрочную и среднесрочную перспективы целесообразно применять детально разработанные и опробованные методы экстраполяции временных рядов. Но при прогнозировании на отдаленную перспективу применение методов экстраполяции затруднено и зачастую невозможно из-за недостаточного объема информации и проблем ее извлечения из эмпирических наблюдений, содержащих скрытые периодичности производительности труда рабочих. В такой ситуации возникает необходимость представления производительности труда рабочих гармоническими рядами, построенными на основе той или иной методики выявления скрытых периодов в динамике этого показателя [5, с. 82].

Для прогнозирования производительности труда рабочих могут использоваться традиционные динамические модели, построенные на основе временных (динамических) рядов.

Производительность труда как уровень динамического ряда генерируется под влиянием множества факторов, которые с известной долей условности можно объединить в три группы:

- факторы, которые определяют тенденцию временного ряда;
- факторы, которые формируют циклические колебания временного ряда;
- факторы случайного характера.

В соответствии с этим зависимость производительности труда рабочих от сочетания различных факторов и фактора времени принимает различные формы.

Производительность труда как уровень временного ряда характеризуется тенденцией, которая показывает суммарное долгосрочное влияние множества факторов на ее динамику. При этом каждый из этих факторов оказывает воздействие на показатель

производительности труда, имеющее разную направленность. В целом же они формируют повышающую или понижающую тенденцию производительности труда рабочих. При таких условиях для прогнозирования производительности труда рабочих наиболее широко используются трендовые, регрессионные динамические и авторегрессионные модели, методы экспоненциального сглаживания, экономико-статистические методы, метод производственной функции.

Производительность труда имеет циклические колебания, которые могут иметь сезонный характер. Если имеется большой массив данных за достаточно длительные промежутки времени, то можно выявить циклические колебания, которые имеют общую динамику производительности труда и фазы цикла, через которые наблюдается ее колебания. В этом случае для формирования экономико-математической модели производительности труда рабочих рекомендуется применять методы спектрального и гармонического анализа. Динамическая однофакторная модель производительности труда рабочих может быть аппроксимирована тригонометрическим полиномом:

$$Y(t) = A_0 + A'_{0t} + \sum_{m=1}^n A_m \sin\left(\frac{2\pi}{P_m} t + j_m\right), \quad (1)$$

здесь  $A_0 + A'_{0t}$  — тренд в виде линейной функции;  $A_m$  — амплитуда колебания;  $P_m$  — период, который подлежит выявлению;  $j_m$  — фаза гармоники.

Тогда динамическая многофакторная модель производительности труда рабочих может быть представлена следующей смешанной экономико-математической моделью:

$$Y(t) = f_0(x_i) + f(x_i)t + \sum_{m=1}^n f_k(x_i) \sin\left(\frac{2\pi}{P_m} t + j_m\right), \quad (2)$$

Производительность труда в динамике может не содержать ни тренда, ни циклических колебаний, а каждый следующий ее уровень во временном ряду может быть представлен суммой среднего уровня ряда и некоторой случайной величины. В такой ситуации для прогнозирования производительности труда рабочих могут быть использованы кусочно-простые модели. Поведение производительности труда адекватно может быть аппроксимировано совокупностью простейших динамических моделей вида:

$$Y(t) = f(x^{t-1}; \theta_i); \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где  $f(x^{t-1}; \theta_i)$  — кусочно-линейная разностная регрессионная функция, представляющая кусочно-марковскую модель первого типа:

$$f(x^{t-1}; \mathbf{q}_i) = \sum_{j=1}^m y(x^{t-1}; \mathbf{b}_{ij}) y(x^{t-1}; \mathbf{a}_{ij}); \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $y(x^{t-1}; \mathbf{a}_{ij})$  — линейная регрессия, определенная лишь в области  $\Theta_{ij}$  значений аргумента;

$\psi(x^{t-1}; \beta_{ij})$  — характеристическая функция  $\Theta_{ij}$ .

Производительность труда рабочих может быть выражена кусочно-марковской моделью второго типа:

$$Y(t) = f(x^{t-1}; x^{t-2}; \theta_i); \quad i = 1, n, \quad (5)$$

Конечно, реальные данные о производительности труда могут целиком и полностью не представлять одну из каких-либо рассмотренных выше моделей. В большинстве случаев они содержат все три компонента. Каждый уровень производительности труда рабочих определяется тенденцией, сезонными колебаниями и случайной величиной.

Методика построения экономико-математических динамических моделей прогнозирования производственной эффективности труда рабочих предложена и реализована в работах [2, с. 99–113; 5, с. 78–102; 7, с. 3–6].

Она состоит из следующих этапов.

1-й этап. Формируются статистические однофакторные и многофакторные регрессионные модели производительности труда рабочих предприятия.

2-й этап. Производится анализ построенных моделей с целью выявления периодических (сезонных) колебаний производительности труда рабочих в пределах тренда в течение года по месяцам.

3-й этап. Временные ряды производительности труда рабочих с эффектом сезонности исследуются методом гармонического анализа.

4-й этап. Формулируется задача спектрального анализа. По заданным значениям функции  $Y_k$  (производительности труда рабочих) в моменты

$$t_k = k * T/N, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (6)$$

аппроксимировать  $Y(t)$  на интервале  $(0, T)$  тригонометрическим полиномом вида:

$$Y(t) = A_0 + A'_{0t} + \sum_{m=1}^e A_m \sin\left(\frac{2\pi}{P_m} t + j_m\right), \quad (7)$$

Спектральный анализ позволяет выявить скрытую периодичность, т.е. определить величину  $P_m$ . Тригонометрический полином (7) представляется в виде показательной функции:

$$Y(t) = \sum_{m=1}^e C_m \cdot e^{\frac{j2\pi t}{P_m}}, \quad (8)$$

где коэффициенты  $C_m$  определяются формулой обратного преобразования Фурье, которая для конечного дискретного ряда имеет вид:

$$C_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot e^{\frac{j2\pi t}{P_m}}, \quad (9)$$

График зависимости величин  $|C_m|^2$  от  $m$  называется линейчатый спектр Фурье, где  $P_m$  — период кратный длине реализации  $T$  ( $1 \leq T \leq 120$ ),  $m$  — номер гармоники.

5-й этап. Определяются параметры для тригонометрической функции (7) методом наименьших квадратов:

$$\sum_{k=0}^{N-1} [Y(t_k) - Y_k]^2, \quad (10)$$

6-й этап. Формируется ряд наблюдений, значения которых представляют результирующее взаимодействие некоторых периодических компонентов со случайной ошибкой:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_k = \sum_{i=1}^i g_i(t_k) + \Pi_k, \\ t = \frac{K \cdot T}{N}, \quad k = \overline{0, N-1}, \\ g_i(t) = A_i \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + j_i\right) \end{array} \right\}, \quad (11)$$

где  $\Pi_k$  — величина случайной ошибки. Такой ряд можно рассматривать как дискретный стационарный временной ряд, что позволяет определить параметры его гармонических составляющих с помощью методов спектрального анализа.

8-й этап. Исследуется выборочная функция спектральной плотности или выборочный спектр. Для ряда (11):

$$S(f) = T |C_f|^2, \quad (12)$$

где  $C_f$  есть преобразование Фурье ряда (11):

$$C_f = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot e^{-j2\pi t_k}, \quad (13)$$

Параметр  $f$  называется частотой, функция  $S(f)$  определена на непрерывном интервале частот  $0 \leq f \leq 1/2H$ . Здесь  $H = T/N$  — шаг во времени.

Выборочный спектр временного ряда (11) можно рассматривать как суперпозицию выборочных спектров его периодических компонентов  $g_i(t)$  и чистого случайного процесса  $\Pi(t)$  (белого шума).

Если процесс содержит скрытую периодичность, то при частоте  $f = 1/P$  функция  $S_f$  имеет максимум. При этом  $P$  соответствует периоду гармонической составляющей с максимальной амплитудой.

9-й этап. Исключается найденная гармоническая составляющая из ряда (11).

10-й этап. Этот прием исключения повторяется необходимое число раз до тех пор, пока этот ряд не превратится в чистый случайный процесс (белый шум). Последовательное исключение гармонических составляющих позволяет избежать эффекта наложения частот.

11-й этап. Рассчитываются границы областей устойчиво определяемых периодов:

$$2H \leq P \leq NH/2. \quad (14)$$

В силу симметричности преобразования Фурье выборочный спектр также является симметричной функцией относительно точки  $f = 0$ . Поэтому достаточно вычислить  $S(f)$  по формуле (12) для  $f \in [0, 1/2H]$ . Целесообразно вычислять выборочную функцию спектральной плотности при частотах  $f = m/NH$ ,  $m = 0, N/2$ , где  $m$  — индекс спектральной функции.

Вычисление функции можно произвести при помощи быстрого преобразования Фурье, а затем определить ее максимальное значение. Формула (12) примет вид:

$$S(f_m) = S_m = \frac{H}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot e^{-j2\pi mk/N} \right|^2 \quad (15)$$

Период гармонической компоненты, имеющей максимальную амплитуду  $P = 1/f$ . Представим ряд (11) в виде:

$$Y_{k,r} = A_r \cdot \sin\left(\frac{2\pi t_k}{P} + j_r\right), \quad k = \overline{0, N-1} \quad (16)$$

При  $Y_{k,r} = Y_k$  уравнение (16) равносильно системе линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_k = w \cdot X_k + V \cdot Z_k, \quad k = \overline{0, N-1}; \\ w = A \cdot \cos j; \\ V = A \cdot \sin j; \\ X_k = \sin \frac{2\pi t_k}{P}; \\ Z_k = \cos \frac{2\pi t_k}{P}. \end{array} \right. \quad (17)$$

12-й этап. Решается система уравнений относительно  $w, V$  методом наименьших квадратов.

13-й этап. Определяются значения  $A$  и  $\varphi$ . Теперь параметры гармонической компоненты с максимальной амплитудой ряда (11) полностью определены.

14-й этап. Рассчитываются ошибки параметров модели по формулам:

$$s_A^2 = \frac{s_w^2 \cdot w^2 + s_V^2 \cdot V^2}{w^2 + V^2}, \quad (18)$$

$$s_j^2 = \frac{s_w^2 \cdot V^2 + s_V^2 \cdot w^2}{(w^2 + V^2)^2}, \quad (19)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho NH} \arcsin \frac{s}{A}, \quad (20)$$

$$\Delta P = \frac{P^2}{\rho NH} \arcsin \frac{s}{A}, \quad (21)$$

где  $\sigma_A^2, \sigma_\varphi^2$  — дисперсия соответственно параметров  $A$  и  $\varphi$ ;  $\sigma$  — среднеквадратическая ошибка приближения (16);  $\Delta f, \Delta P$  — ошибка в определении соответственно частоты и периода.

15-й этап. Построение динамической однофакторной модели производительности труда рабочих. В результате реализации данной методики получена динамическая однофакторная модель зависимости производительности труда  $Y(t)$  от фактора времени  $t$ , которая имеет вид:

$$Y(t) = 105,85 + 0,03t + 2,89\sin(2\pi t/4,0 + 5,14) + 2,43\sin(2\pi t/6,0 + 6,02) + 1,48\sin(2\pi t/12,0 + 1,64) + 1,36\sin(2\pi t/3,0 + 4,29), \quad (22)$$

где  $t$  изменяется в пределах от  $-31,5$  до  $91,5$ , при этом первому месяцу 1979 г. соответствует  $-31,5$ , далее  $t$  соответственно изменяется с шагом равным 1-му месяцу.

16-й этап. Проверка построенной модели на адекватность реальным условиям по  $F$ -критерию. Расчетное значение  $F$ -критерия равно 16,7 и превышает табличное значение, что свидетельствует о соответствии построенной модели реальным условиям производства.

Фрагмент сравнительных результатов расчета уровня производительности труда работниц суконной фабрики им. С. Разина территориального объединения «Ульяновсктекстильпром» по месяцам в период с 1979 г. по 1988 г. приведен в табл. 1.

Анализ данных табл. 1 выявил критические точки уровня производительности труда рабочих. Так, например, производительность труда рабочих заметно повышается в феврале, июне, октябре. Снижение производительности труда рабочих наблюдается в апреле, июле, августе. Необходимо отметить, что в октябре и ноябре уровень производительности труда рабочих медленно возрастает, а в декабре незначительно снижается. Следовательно, производительность труда рабочих в течение года изменяется с установленной периодичностью. В первой гармонике период равен 4-м месяцам, далее период равен соответственно 6, 12 и 3 месяца. Это означает, что производительность труда рабочих изменяется периодически, а период колебания равный 4-м месяцам является наиболее значимым. При этом среднеквадратическое отклонение прогнозируемых значений производительности труда рабочих от соответствующих фактических значений составляет 1,14%.

**Фактические и прогнозируемые значения уровня производительности труда рабочих**

Месяц	$Y_k$	$Y(t)$	Месяц	$Y_k$	$Y(t)$
1	101,3	103,8	26	106,3	105,8
2	103,8	104,9	27	104,1	105,7
3	102,1	104,9	28	102,4	101,6
4	100,5	100,9	29	102,9	104,2
5	101,2	103,2	30	110,8	111,8
6	109,4	110,2	31	106,4	108,0
7	105,6	107,5	32	101,3	100,0
8	99,4	99,2	33	101,7	101,4
9	100,8	100,4	34	104,2	104,2
10	103,2	103,4	35	104,6	104,0
11	103,9	103,1	36	105,5	104,7
12	104,1	103,8	37*	105,7	105,1
13*	104,6	104,3	38	107,1	106,3
14	105,3	105,4	39	104,7	106,0
15	103,8	105,3	40	103,3	102,0
16	101,0	101,2	41	104,0	104,3
17	101,4	103,7	42	114,6	112,3
18	110,3	111,4	43	108,4	108,3
19	108,3	107,7	44	102,6	100,3
20	100,1	99,6	45	103,9	101,9
21	100,9	100,9	46	104,8	104,6
22	103,5	103,8	47	104,9	104,4
23	104,1	103,5	48	105,7	105,1
24	104,8	104,3	49*	106,3	105,6
25*	104,9	104,7	50	108,2	106,8

Примечание: \* — соответственно первый месяц 1980–1984 гг.,  $Y_k$  и  $Y(t)$  — соответственно фактический и расчетный уровни производительности труда рабочих.

Таким образом, процесс изменения производительности труда рабочих наилучшим образом аппроксимируется тригонометрическим полиномом (отрезком ряда Фурье). Определяя период изменения производительности труда рабочих, можно прогнозировать ее величину.

Динамическая однофакторная модель вида (22) отображает колебательный процесс производительности труда вокруг общей тенденции достаточно точно ( $\sigma = 1,14\%$ ), но эта модель не может объяснить и обосновать этот колебательный процесс, т.к. в модели отсутствуют качественные показатели (факторы), объясняющие этот процесс [8, с. 3].

По этой причине возникает необходимость в построении динамической многофакторной модели производительности труда рабочих.

Известно, что многофакторная модель производительности труда может быть идентифицирована как динамическая, если учитываются: а) общие закономерности изменения производительности труда в изучаемый интервал времени; б) закономерности изменения во времени структуры факторов-аргументов; в) запаздывания влияния факторов-аргументов на производительность труда.

Чтобы построить модель, удовлетворяющую требованиям динамической многофакторной модели, исследуем коэффициенты ряда Фурье (7) во взаимодействии с социальными факторами. Для этого необходимо построить для каждого рабочего модель вида (7) по данным динамического ряда.

Таблица 2

**Зависимость коэффициентов ряда Фурье от социальных факторов**

№ рабочего	Коэффициенты ряда Фурье					Социальные факторы			
	$A_0$	$A'_0$	$A_1$	...	$A_m$	$X_1$	$X_2$	...	$X_k$
1	$A_{10}$	$A'_{10}$	$A_{11}$	...	$A_{1m}$	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1k}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$A_{i0}$	$A'_{i0}$	$A_{i1}$	...	$A_{im}$	$X_{i1}$	$X_{i2}$	...	$X_{ik}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$A_{n0}$	$A'_{n0}$	$A_{n1}$	...	$A_{nm}$	$X_{n1}$	$X_{n2}$	...	$X_{nk}$

Заметим, что анализируемые факторы  $X_1, \dots, X_k$  вследствие определенных ограничений изменяются в сравнительно узких пределах, в результате чего связь между коэффициентами ряда Фурье  $A_0, A'_0, A_1, \dots, A_m$  и факторами  $X_1, X_2, \dots, X_k$  с достаточной точностью можно аппроксимировать линейной зависимостью. Методом наименьших квадратов построим многофакторные уравнения регрессии вида:

$$\begin{aligned} A_0 &= f_0(X_1, \dots, X_k) = a_{00} + a_{10}X_1 + \dots + a_{k0}X_k, \\ A'_0 &= f'_0(X_1, \dots, X_k) = a'_{00} + a'_{10}X_1 + \dots + a'_{k0}X_k, \\ A_1 &= f_1(X_1, \dots, X_k) = a_{01} + a_{11}X_1 + \dots + a_{k1}X_k, \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_m = f_m(X_1, \dots, X_k) = a_{0m} + a_{1m}X_1 + \dots + a_{km}X_k,$$

Находим коэффициенты ряда Фурье (7) в виде линейной функции от социальных факторов  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Подставляя в уравнение (7) найденные зависимости (23), получаем модель:

$$\begin{aligned} Y(t) &= f_0(X_1, \dots, X_k) + f'_0(X_1, \dots, X_k) \cdot t + \\ &+ \sum_{i=1}^m f_k(X_1, \dots, X_k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{P_i} + j_i\right) \end{aligned} \quad (24)$$

Такая зависимость будет удовлетворять требованиям а) и б) идентификации динамической модели. При этом запаздывание влияния факторов-аргументов на производительность труда рабочих не учитывается, т.к. в выборочных данных рассматриваются рабочие, имеющие стаж работы по специальности не менее 2–3 лет. Следовательно, учитывать в модели запаздывание факторов на производительность труда нет необходимости.

Таким образом, модель вида (24) является динамической моделью и на основе этой модели можно прогнозировать производительность труда рабочих.

Для каждого рабочего определяем коэффициенты ряда Фурье по вышеописанной методике, группируя коэффициенты по одинаковым периодам. В качестве фазы принимается фаза, которая имеет наибольшую частоту своего появления. Коэффициенты ряда представлены в табл. 3.

Таблица 3

### Зависимость коэффициентов ряда Фурье от социальных факторов

№ рабочего	Коэффициенты ряда Фурье						Социальные факторы		
	$A_0$	$A'_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$X_1$	$X_5$	$X_6$
1	101,44	0,20	4,15	2,05	2,46	2,45	18	1	1
2	100,49	0,14	5,14	2,88	2,12	3,02	19	2	1
3	101,71	0,17	4,31	2,52	1,37	2,61	22	5	3
4	107,78	0,14	4,08	1,74	1,44	2,86	28	3	4
5	106,87	0,16	4,71	2,57	2,27	3,15	30	3	4
6	108,52	0,11	4,42	2,41	1,22	3,13	31	3	4
7	111,04	-0,13	3,67	1,97	2,25	2,53	34	4	3
8	104,2	-0,09	3,02	1,61	1,39	2,21	43	3	5
9	102,5	-0,05	2,84	1,19	0,70	1,89	50	3	4
10	106,9	-0,07	3,29	1,87	1,76	2,44	39	4	4
11	108,5	-0,02	3,73	1,95	1,53	2,53	41	4	4
12	109,53	0,03	4,03	1,11	1,73	2,77	36	4	4
13	96,66	0,24	4,72	2,23	2,13	2,47	18	1	1
14	108,66	-0,03	3,49	1,77	1,42	2,45	45	4	5
15	110,13	0,04	3,91	2,07	1,67	2,80	38	4	5
16	101,60	0,20	4,67	2,49	2,14	2,72	21	2	2
17	110,82	0,14	4,69	2,59	2,22	3,19	25	4	3
18	101,79	0,21	4,73	2,53	2,18	2,77	20	2	2
19	110,19	0,08	4,51	2,47	2,10	3,04	28	4	3
20	100,56	0,17	4,67	2,49	2,14	2,59	21	2	1

В результате проведенного корреляционного анализа выявлено, что наиболее тесную связь с коэффициентами ряда Фурье имеют факторы  $X_1$  (возраст рабочего, лет),  $X_5$  (жилищные условия рабочего, балл),  $X_6$  (семейное положение рабочего, балл). Факторы  $X_2$  (стаж работы по специальности, лет),  $X_3$  (общий стаж работы, лет),

$X_4$  (уровень образования рабочего, балл) не включены в уравнение регрессии в силу того, что они мультиколлинеарны с фактором  $X_1$ , т.е. парный коэффициент корреляции превышает или очень близок к допустимому значению 0,8.

Далее построены уравнения зависимости коэффициентов ряда Фурье от социальных факторов:

$$\begin{aligned} A_0 &= 94,89 - 0,21X_1 + 4,53X_5 + 1,02X_6, \\ A'_0 &= 0,43 - 0,01X_1 - 0,04X_5 + 0,03X_6, \\ A_1 &= 5,67 - 0,06X_1 + 0,13X_5, \\ A_2 &= 3,07 - 0,04X_1 + 0,13X_5, \\ A_3 &= 2,74 - 0,04X_1 + 0,12X_5, \\ A_4 &= 2,97 - 0,05X_1 + 0,27X_5 + 0,13X_6. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя в уравнение (7) найденные коэффициенты, получим экономико-математическую динамическую многофакторную модель производительности труда рабочих вида:

$$\begin{aligned} Y(t) &= 94,89 - 0,21X_1 + 4,53X_5 + 1,02X_6 + (0,43 - 0,01X_1 - \\ &- 0,04X_5 + 0,03X_6)t + (5,67 - 0,06X_1 - 0,13X_5) \cdot \sin(2\pi t/4,0 + 5,1) + \\ &+ (3,07 - 0,04X_1 + 0,13X_5) \cdot \sin(2\pi t/6,0 + 4,2) + (2,74 - 0,04X_1 + \\ &+ 0,12X_5) \cdot \sin(2\pi t/12,0 + 3,8) + (2,97 - 0,05X_1 + 0,27X_5 + \\ &+ 0,13X_6) \cdot \sin(2\pi t/3,0 + 0,2), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $t$  — фактор времени, мес. При этом периодам  $P_1 = 4,0$ ;  $P_2 = 6,0$ ;  $P_3 = 12,0$ ;  $P_4 = 3,0$  соответствуют фазы  $\varphi_1 = 5,1$ ;  $\varphi_2 = 4,2$ ;  $\varphi_3 = 3,8$ ;  $\varphi_4 = 0,2$ .

Модель (26) проверена на адекватность по  $F$ -критерию. Расчетное значение  $F$ -критерия равно 85,7 и превышает табличное значение. Это свидетельствует об адекватности модели реальным условиям производства.

Выборочные результаты расчета производительности труда по месяцам, начиная с 1986 г., приведены в табл. 4.

Анализ данных табл. 4 показывает, что прогнозируемый ретроспективный уровень производительности труда периодически колеблется в зависимости от социальных факторов. В качестве объясняющих факторов этого процесса являются факторы: возраст ( $X_1$ ), жилищные условия ( $X_5$ ), семейное положение ( $X_6$ ) рабочего. Например, уровень производительности труда работницы в возрасте 19 лет, проживающей в общежитии, незамужней, колеблется от 85,3% до 106,2%, а у работницы такого же возраста, но проживающей в своем доме или в отдельной квартире, имеющей одного ребенка, производительность труда колеблется от 93,0% до 114–117%.

Следовательно, жилищные условия и семейное положение оказывают значимое влияние на уровень производительности труда рабочих в динамике. Периодические колебательные процессы производительности труда рабочих объясняются состоянием рассмотренных выше социальных факторов. Так, чем лучше жилищные условия, тем эффективнее происходят процессы восстановления рабочих, что, при прочих равных условиях (постоянства состояния других факторов), способствует росту производительности их труда и наоборот. При аналогичных условиях количественный и качественный состав семья определяет степень занятости рабочих домашним хозяйством. В частности, чем больше семья, тем больше занятость рабочих домашним хозяйством, тем меньше времени на восстановление, что препятствует росту производительности их труда.

Предложенная методика построения экономико-математических динамических моделей позволяет определить не только изменение уровня производительности труда рабочих во времени, но и периодичность его изменения в зависимости от изменения состояния социальных факторов.

Применение построенных экономико-математических динамических моделей в практике управления производительностью труда рабочих дает возможность выявить периоды ее снижения и роста в течение года, а также причины ее изменения в зависимости от состояния объясняющих факторов. Постоянный мониторинг отклонения фактической производительности труда рабочих от прогнозируемого (планируемого) ее уровня в результате изменения объясняющих факторов создает условия для разработки и осуществления системы мероприятий по устранению или нивелированию причин таких отклонений с целью достижения наименьшей амплитуды колебания аппроксимирующих гармоник.

В результате использования предлагаемой методики появляется возможность достижения такого уровня производительности труда рабочих, при котором наблюдаются минимальные его колебания относительно прогнозируемого тренда. В конечном итоге это будет способствовать увеличению объема производства продукции предприятия и повышению его эффективности.



**Прогнозируемые ретроспективные значения производительности труда рабочих**

Ме- сяц	$Y(t)$	Ме- сяц	$Y(t)$	Ме- сяц	$Y(t)$	Ме- сяц	$Y(t)$
Начальные данные: $X_1 = 19, X_5 = 1, X_6 = 1$							
1	90,6	10	94,5	19	98,2	28	93,6
2	94,2	11	93,5	20	88,1	29	97,1
3	95,7	12	93,4	21	92,4	30	106,2
4	88,9	13	93,2	22	96,9	31	100,9
5	92,4	14	86,6	23	95,8	32	90,0
6	103,1	15	98,1	24	95,7	33	94,7
7	95,8	16	91,4	25	95,4	34	98,8
8	85,3	17	94,8	26	98,8	35	97,9
9	90,1	18	103,9	27	100,2	36	97,7
Начальные данные: $X_1 = 19, X_5 = 3, X_6 = 3$							
1	99,4	10	103,3	19	107,3	28	102,3
2	102,7	11	101,9	20	95,5	29	105,6
3	105,5	12	103,0	21	101,6	30	117,7
4	97,6	13	101,9	22	105,6	31	109,4
5	101,0	14	105,2	23	104,2	32	97,8
6	113,0	15	107,9	24	105,3	33	103,7
7	104,9	16	100,6	25	104,2	34	107,7
8	93,0	17	103,5	26	107,4	35	106,3
9	99,2	18	115,7	27	110,1	36	107,4
Начальные данные: $X_1 = 30, X_5 = 3, X_6 = 3$							
1	100,8	10	103,5	19	106,1	28	100,9
2	103,6	11	102,2	20	96,0	29	103,7
3	105,7	12	102,2	21	101,0	30	113,9
4	98,9	13	102,0	22	104,5	31	106,8
5	101,8	14	104,8	23	103,2	32	96,9
6	112,3	15	106,8	24	103,9	33	101,9
7	105,0	16	100,0	25	102,9	34	105,3
8	94,9	17	102,9	26	105,7	35	104,0
9	100,0	18	113,2	27	107,6	36	104,6
Начальные данные: $X_1 = 37, X_5 = 4, X_6 = 4$							
1	107,4	10	109,4	19	111,0	28	105,6
2	109,9	11	107,9	20	101,5	29	107,9
3	112,1	12	108,9	21	106,5	30	117,7
Начальные данные: $X_1 = 45, X_5 = 4, X_6 = 4$							
1	108,4	10	109,6	19	110,1	28	104,6
2	110,5	11	108,2	20	101,9	29	106,6
3	112,3	12	108,8	21	106,1	30	114,9
4	106,4	13	107,7	22	108,7	31	109,0
5	108,5	14	109,8	23	107,3	32	100,9
6	117,2	15	111,5	24	107,8	33	105,0
7	111,0	16	105,6	25	106,7	34	107,5
8	102,6	17	107,6	26	108,7	35	106,2
9	106,9	18	116,2	27	110,4	36	106,6
Начальные данные: $X_1 = 34, X_5 = 4, X_6 = 4$							
1	107,1	10	109,3	19	111,3	28	105,9
2	109,6	11	107,8	20	101,4	29	108,5
3	112,1	12	108,9	21	106,6	30	118,7
4	105,1	13	107,7	22	109,7	31	111,5
5	107,7	14	110,2	23	108,3	32	101,7
6	118,4	15	112,5	24	109,3	33	106,8
7	110,9	16	105,6	25	108,0	34	109,8
8	100,8	17	108,2	26	110,5	35	108,4
9	106,2	18	118,7	27	112,8	36	109,4

**Литература**

1. Галиуллин Х.Я. Методологические подходы к оценке эффективности труда рабочих на предприятиях текстильной промышленности // Проблемы современной экономики. — 2012. — №4(44). — С. 133–136.
2. Галиуллин Х.Я. Развитие системы управления эффективностью труда на предприятии.— Димитровград: Технологический институт — филиал «Ульяновская ГСХА», 2011. — 256 с.
3. Галиуллин Х.Я. Система управления эффективностью труда рабочих на предприятиях легкой промышленности // Вестн. Саратовского гос. социально-экономического ун-та. — 2012. — № 1. — С. 219–223.
4. Галиуллин Х.Я. Управление эффективностью труда рабочих на предприятиях текстильной промышленности // Проблемы современной экономики. — 2012. — №4(44). — С. 483–487.
5. Галиуллин Х.Я. Совершенствование планирования использования трудовых ресурсов (на примере предприятий шерстяной отрасли промышленности): Дисс. ... на соискание ученой степени канд. техн. наук. / ЛИТЛП им. С.М. Кирова, 1989. — 177 с.
6. Галиуллин Х.Я., Ермаков Г.П. Применения гармонического и спектрального анализа при прогнозировании производительности труда рабочих // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1991. — №3. — С. 3–6. Сообщение 1.
7. Галиуллин Х.Я., Ермаков Г.П. Применения гармонического и спектрального анализа при прогнозировании производительности труда рабочих // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1991. — №4. — С. 3–6. Сообщение 2.
8. Ермаков Г.П. Методологические проблемы идентификации и расчета экономического эффекта // Научный вестник Технологического института — филиала ФГБОУ ВПО «Ульяновская ГСХА им. П.А. Столыпина». — 2013. — №11. С. 43–52.
9. Саган О.И., Ермаков Г.П. Совершенствование управления производительностью труда рабочих с учетом социальных факторов // Вестник Самарского государственного экономического университета. — 2007. — № 4. — С. 130–134.